Решения. Математика

1. Делимость на 53 с очевидностью следует из равенства

$$100\underbrace{1\ldots1}_{\text{к единиц}}7\cdot 9 = 901\underbrace{0\ldots0}_{\text{к-1 нулей}}53 = 901\cdot 10^{k+1}+53 = (17\cdot 10^{k+1}+1)\cdot 53$$

2. а) Если $\sin\alpha = \sin x$, то $x=\alpha+2\pi k$ или $x=\pi-\alpha+2\pi k$ (к-целое) соответственно $\frac{x}{2}=\frac{\alpha}{2}+\pi k$ или $\frac{x}{2}=\frac{\pi-\alpha}{2}+\pi k$. Им соответствуют точки на единичной окружности $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}+\pi$, $\frac{\pi-\alpha}{2}$, $\frac{\pi-\alpha}{2}+\pi$ и только они

Наибольшее число таких точек четыре.

б). Решается аналогично. Наибольшее число значений, которое может принимать $\sin\frac{\alpha}{3}$ равно три.

3. Если внутренний угол многоугольника меньше 170°, то соответствующий внешний угол больше 10°. Если бы таких углов было хотя бы 36, то их сумма была бы больше 360°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника в точности 360°. Противоречие.

4. Если a, b, c - длины сторон треугольника и $a=\frac{b+c}{3}$, то по неравенству треугольника $c < a+b$ и тогда $3a = b+c < b+(a+b) = a+2b$ После упрощений $a<b$. Точно так же: $3a = b+c < (a+c)+c$ и $a<c$. Против меньшей стороны a лежит и меньший угол треугольника

5. Обозначим массы кусочков в порядке возрастания $m_1<m_2<\ldots<m_9$. Тогда $m_1+m_3+m_5+m_7 < m_2+m_4+m_6+m_8$ и $m_1+m_3+m_5+m_7+m_9 > m_2+m_4+m_6+m_8$. Следовательно, чтобы уравнять массы слева и справа неравенства, достаточно разрезать m_9.

6. Если число супружеских пар N, то N замужних женщин, что составляет $\frac{3}{5}$ всех женщин. Значит всех женщин $\frac{5}{3}N$. Женатых мужчин N, что составляет $\frac{2}{3}$ всех мужчин, значит их $\frac{3}{2}N$. Общее число жителей $\frac{5}{3}N+\frac{3}{2}N=\frac{19}{6}N$, из них в браке $2N$, их доля $\frac{2N}{\frac{19}{6}N}=\frac{12}{19}$.

7. Обозначим $n=23^{2018}$, тогда

$$a=\frac{23^{2017}+1}{23^{2018}+1}=\frac{1}{23}\left(\frac{23^{2018}+23}{23^{2018}+1}\right)=\frac{1}{23}\,\frac{n+23}{n+1}=\frac{1}{23}\left(1+\frac{22}{n+1}\right)$$

$$b=\frac{23^{2018}+1}{23^{2019}+1}=\frac{1}{23}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\frac{1}{23}\left(1+\frac{22}{23n+1}\right)$$

Сравнивая знаменатели, видим $a>b$.

8. Так как для $a>0$ $a+\frac{1}{a}\geq 2$, то левая часть уравнения ≥ 4, правая ≤ 4, причем равенство достигается только при $x=0$.

9. Если катеты 1 и 4, то медианы находятся по теореме Пифагора и равны $\sqrt{5}$ и $\frac{\sqrt{65}}{2}$. Точка пересечения медиан делит их в отношении 1:2, поэтому треугольник со сторонами 2, $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{\sqrt{65}}{3}$ имеет искомый угол α, который находится по теореме косинусов

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{65}}{3}\right)^2-2\,\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{\sqrt{65}}{3}\cos\alpha=2^2 \text{ и } \cos\alpha=\frac{17}{5\sqrt{13}}.$$

10. Дробь $\frac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}=\frac{(7n+4)(n+1)}{n(6n+5)}$ сократима, когда у числителя и знаменателя общие делители.

У $n+1$ нет общих делителей с n и $6n+5$, так как $\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$ и $\frac{6n+5}{n+1}=6-\frac{1}{n+1}$. Поэтому общие делители могут быть только у $7n+4$ со знаменателем

$\frac{7n+4}{n}=7+\frac{4}{n}$, откуда $n=1,2,4$. Дробь $\frac{7n+4}{6n+5}$ сократима одновременно с дробью $\frac{7(6n+5)-6(7n+4)}{6n+5}=\frac{11}{6n+5}$, откуда $n=11k+1$.

Следовательно, сократима наша дробь при $n=2,4,11k+1$ $(k=0,1,2,\ldots)$