

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Косенок Сергей Михайлович
Должность: ректор
Дата подписания: 18.06.2024 12:45:20
Уникальный программный ключ:
e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

Теория функций комплексного переменного, 3 семестр

Код, направление подготовки	03.03.02 Физика
Направленность (профиль)	Цифровые технологии в геофизике
Форма обучения	очная
Кафедра-разработчик	Кафедра экспериментальной физики
Выпускающая кафедра	Кафедра экспериментальной физики

Типовые задания для контрольной работы:

1. Представить в тригонометрической и показательной форме комплексные числа и изобразить их.

- 1) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$.
- 2) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.
- 3) $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$.
- 4) $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 2 + 5i$.

2. Произвести умножение и деление комплексных чисел.

- 1) 9. $\frac{3-i}{4+5i}$, $(3-i)(4+5i)$.
- 2) 10. $\frac{1-2i}{1+i}$, $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$.
- 3) 11. $\frac{1+i}{1-i}$, $(3+5i)(4-i)$.
- 4) 12. $\frac{4}{1-i}$, $(3+2i)(-2i)$.

3. Возвести в степень и извлечь корни.

- 1) 15. $(1-i)^5$, $\sqrt[6]{-1}$.
- 2) 16. $(4-7i)^3$, $\sqrt[3]{i}$.
- 3) 17. $(\sqrt{8}-i)^2$, $\sqrt[3]{1}$.
- 4) 18. $(1+i\sqrt{3})^{10}$, $\sqrt{1+i}$.

4. Проверить, выполняются ли условия Коши-Римана, и если они выполняются, найти производные следующих функций:

а) $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$; б) $w = xy - \frac{1}{2}i(x^2 - y^2)$;

в) $w = x^3 + y + i(x + y^3)$; г) $w = \frac{z}{\bar{z}}$; д) $w = \operatorname{Re} z$; е) $w = \operatorname{Im} z$; ж) $w = |z|$; з) $f(z) = y + xi$; и)

$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

5. Проверить, что $u(x, y)$ (соответственно $v(x, y)$) является действительной (мнимой) частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по ее известной действительной $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$.

1) $u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0$;

2) $u = x^3 - 3xy^2 + 1, f(0) = 1$;

3) $v = e^x(y \cos y + x \sin x), f(0) = 0$;

4) $u = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0$;

5) $u = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y, f(0) = 2$.

6) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i$;

7) $v = e^{-y} \sin x + y, f(0) = 1$.

8) $v = e^x \cos y, f(0) = 1 + i$;

9) $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, f(0) = 1$.

10) $v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 2$;

11) $u = e^{-y} \cos x, f(0) = 1$.

6. Определить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при действии функций:

а) $f(z) = \ln(z-1)$; б) $f(z) = e^z$; в) $f(z) = \frac{1}{z}$;

г) $f(z) = z^2$; д) $f(z) = z^2 + 2z$; е) $f(z) = z^3$; ж) $f(z) = \ln z$.

7. Вычислить интеграл от функции комплексного по данной кривой.

- 1) $\int_l z^2 dz$, l - радиус вектор точки $z = 2 + i$.
- 2) $\int_l z^2 dz$, l - ломаная с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,1)$.
- 3) $\int_l \operatorname{Im} z dz$, l : 1) прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $(2+i)$; 2) ломаная, соединяющая точки 0 и i с точкой $(2+i)$.
- 4) $\int_l z dz$, l - ломаная, соединяющая точки $A = (-2,0)$, $B = (-1,1)$, $C = (1,1)$, $D = (2,0)$.
- 5) $\int_l |z| dz$, l - полуокружность радиуса 1 с центром в 0 , лежащая в верхней полуплоскости, причем точка $(-1,0)$ является начальной, а точка $(+1,0)$ - конечной.
- 6) $\int_l \frac{z}{\bar{z}} dz$, l - граница области $1 \leq |z| \leq 2$, $\operatorname{Im} z > 0$.
- 7) $\int_l \frac{dz}{z}$, l - окружность $|z| = r$.
- 8) $\int_l \frac{z^2}{z-8i} dz$, l - окружность $|z| = 1$.
- 9) $\int_l \frac{dz}{\sqrt{z}}$, l - верхняя половина окружности $|z| = 1$, обходимая в положительном направлении.
- 10) $\int_l \frac{dz}{z^3 + 4z}$, $l = \{|z| = 3\}$.
- 11) $\int_l \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)} dz$, $l = \{|z| = e\}$.

8. Найти разложение в ряд Лорана данной функции по степеням z .

- 1) $\frac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$;
- 2) $\frac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$;
- 3) $\frac{3z-18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}$;
- 4) $\frac{2z-16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}$;
- 5) $\frac{5z-50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}$;

$$6) \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2};$$

9. Найти разложение в ряд Лорана данной функции по степеням $z-z_0$.

$$1) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 1+2i.$$

$$2) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 2-3i.$$

$$3) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -3-2i.$$

$$4) \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 2-i.$$

10. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

$$1) z \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2.$$

$$2) \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1.$$

$$3) ze^{\frac{z}{z-5}}, z_0 = 5.$$

$$4) \sin \frac{2z-7}{z+2}, z_0 = -2$$

11. Найти особые точки, для полюсов указать их порядок и исследовать поведение функций в окрестности этих точек.

$$1) \frac{z^2-1}{z^2+1}.$$

$$2) \frac{1}{1-\cos z}.$$

$$3) \frac{1-e^{-z}}{z}.$$

$$4) \frac{2\sin \frac{z}{2} - z}{z^3}.$$

$$5) \frac{z+2}{z(z-1)^2}.$$

$$6) \cos \frac{1}{z-2}.$$

$$7) \frac{1}{1-\sin z}.$$

$$8) \frac{z^4}{1+z^4}.$$

12. Вычислить с помощью вычетов интегралы, обходя замкнутые контуры в положительном направлении.

$$1) \int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2(z+3)} dz .$$

$$2) \int_L \frac{dz}{z^4+1}, \text{ где } L - \text{ окружность } x^2+y^2=2x .$$

$$3) \int_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^2+1)(z^4+2)^3} dz .$$

$$4) \int_L \frac{zdz}{z^4-1}, \text{ где } L - \text{ окружность: а) } |z-1|=\frac{3}{2}; \text{ б) } |z|=2 .$$

$$5) \int_L \frac{zdz}{z(z+2)(z+4)}, \text{ где } L - \text{ окружность: а) } |z|=1; \text{ б) } |z|=3; \text{ в) } |z|=5 .$$

$$6) \int_{|z|=4} \frac{(z+1)dz}{(z-1)(z-2)(z-3)} .$$

$$7) \int_{|z|=2} \frac{\sin zdz}{(z+1)^2(z-i)} .$$

$$8) \int_{|z|=3} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-2)} .$$

13. Вычислить несобственный интеграл от рациональной функции.

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} .$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)} .$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx .$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} .$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)} .$$

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx .$$

$$7) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} \quad (a > 0) .$$

Типовые вопросы к экзамену:

Задание для показателя оценивания дескриптора «Знает»	Вид задания
<p><i>Сформулируйте развернутые ответы на следующие теоретические вопросы (сформулировать основные определения, теоремы, свойства; привести доказательства основных теорем, продемонстрировать примеры, при необходимости проиллюстрировать ответ графиками, рисунками):</i></p> <p><i>работы обучающегося по отдельным разделам дисциплины</i></p> <ol style="list-style-type: none">1. Множество комплексных чисел.2. Алгебраическая форма комплексного числа. Арифметические операции в алгебраической форме.3. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.4. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Формула Муавра, извлечение корня из комплексного числа.5. Предел последовательности комплексных чисел.6. Бесконечно удаленная точка. Стереографическая проекция.7. Понятие внутренней, внешней, предельной и граничной точки множества, понятие области; кривые на комплексной плоскости.8. Понятие комплексной функции. Предел функции. Непрерывность.9. Понятие производной комплексной функции. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.10. Свойства аналитических функций.11. Геометрический смысл производной аналитической функции. Понятие конформного отображения.12. Определение и общие свойства интеграла вдоль кривой от функции комплексной переменной.13. Теорема Коши об интеграле от аналитической функции по замкнутому контуру. Теорема Коши, случай многосвязной области.	- теоретический

14. Понятие неопределенного интеграла от комплексной функции, теорема о первообразной.
15. Интеграл Коши.
16. Принцип максимума модуля аналитической функции.
17. Существование производной любого порядка аналитической функции.
18. Теорема Морера.
19. Теорема Лиувилля.
20. Функциональные ряды, равномерная сходимость. Условия равномерной сходимости (признак Вейерштрасса, критерий Коши).
21. Свойства равномерно сходящихся рядов.
22. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости, радиус сходимости степенного ряда.
23. Ряд Тейлора, теорема о разложении аналитических функций в степенной ряд.
24. Нули аналитической функции. Теорема о нулях аналитической функции, следствия из нее. Теорема единственности аналитической функции.
25. Аналитическое продолжение. Продолжение с действительной оси. Продолжение соотношений.
26. Понятие ряда Лорана. Область сходимости ряда Лорана.
27. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Лорана.
28. Классификация изолированных особых точек аналитической функции. Теоремы о характере разложения функций в ряд Лорана в проколотых окрестностях изолированных особых точек.
29. Понятие вычета аналитической функции в изолированной особой точке, формулы вычисления вычетов.
30. Теорема Коши о вычетах.
31. Вычет в бесконечности. Теорема о полной сумме вычетов.
32. Вычисление определенных и несобственных интегралов специального вида с помощью теории вычетов.
33. Определение и основные свойства преобразования

Лапласа. 34. Основные свойства изображений. 35. Определение оригинала по изображению. Формула Меллина. Условия существования оригинала.	
---	--

Задание для показателя оценивания дескриптора «Умеет»	Вид задания
1. Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. 2. Восстановление аналитической функции по ее известной действительной или мнимой части. 3. Разложение функции в ряд Лорана. 5. Вычисление интегралов с помощью теории вычетов. 6. Нахождение изображений функций. 7. По заданным изображениям, найти оригинал. 8. Решить задачу Коши для линейного ОДУ методами операционного исчисления.	- практический

	Вид задания
1. Арифметические операции над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. 2. Восстановление аналитической функции по ее известной действительной или мнимой части. 3. Разложение функции в ряд Лорана. 5. Вычисление интегралов с помощью теории вычетов. 6. Нахождение изображений функций. 7. По заданным изображениям, найти оригинал. 8. Решить задачу Коши для линейного ОДУ методами операционного исчисления.	- практический