

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Косенок Сергей Михайлович  
Должность: ректор  
Дата подписания: 10.06.2024 09:24:39  
Уникальный программный ключ:  
e3a68f3eaa1e62674b54f4998099d3d6bfdcf836

## Оценочные материалы для промежуточной аттестации по дисциплине

### Инженерная математика, 2 семестр

Код, направление подготовки	13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль)	Электроэнергетические системы и сети
Форма обучения	Очная
Кафедра-разработчик	Радиоэлектроники и электроэнергетики
Выпускающая кафедра	Радиоэлектроники и электроэнергетики

### Типовые задания для контрольной работы:

#### I (первые) задачи:

1. Определить при каких значениях  $x$  и  $y$  числа  $z_1 = 2 - xi$  и  $z_2 = y + 2i$  будут равными.
2. Сложить два комплексных числа  $z_1 = 1 + 3i$ ,  $z_2 = 4 - 5i$ .
3. Возвести в степень комплексные числа  $(-2i)^7$ ,  $\left(\frac{i}{2}\right)^8$ .
4. Найти разности комплексных чисел  $z_1 - z_2$  и  $z_2 - z_1$ , если  $z_1 = -2 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + 5i$ .
5. Представить в тригонометрической форме число  $z_3 = -3$ . Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что  $|z_3| = 3$ .
6. Найти произведение комплексных чисел  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 3 + 6i$ .
7. Представить в тригонометрической форме число  $z_2 = 2i$ . Найдем его модуль и аргумент.
8. Решить квадратное уравнение  $z^2 - 6z + 34 = 0$
9. Дано комплексное число  $z = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$ . Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме  $a + bi$ ).
10. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:  $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ ,  $z_2 = -2 + 4i$ ,  $z_3 = -2 - 2i$ ,  $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$ .

#### II

#### (вторые) задачи:

1. Найти и изобразить точками на комплексной плоскости все корни  $\sqrt[6]{-1-\sqrt{3}i}$ . Изобразить пунктиром окружность, на которой эти точки лежат. Построить штрих-пунктиром правильный многоугольник с вершинами в этих точках. Нанести сетку, отобразить оси линиями черного цвета, подписать их. Масштаб по осям сделать одинаковым.

2. Рассчитать напряжённость электрического поля  $\vec{E}$ , создаваемого диполем с дипольным моментом  $d$ . Как известно,  $E = -\text{grad}\varphi(\vec{r})$ , где  $\varphi(\vec{r})$  – распределение скалярного потенциала. В случае, когда источником электрического поля является диполь,  $\varphi(\vec{r}) = (d, \vec{r})/r^3$ . Найдём  $\text{grad}\varphi(\vec{r})$ .

3. Пользуясь интегральным представлением оператора  $\nabla$ , доказать равенство:

$$\int_V [b, [\nabla, \vec{a}]] dV + \int_V [[\vec{a}, \nabla], b] dV = - \oint_S [[\vec{n}, \vec{a}], b] dS, \text{ где } \vec{a}, \vec{b} - \text{ постоянные векторы, } \vec{n} -$$

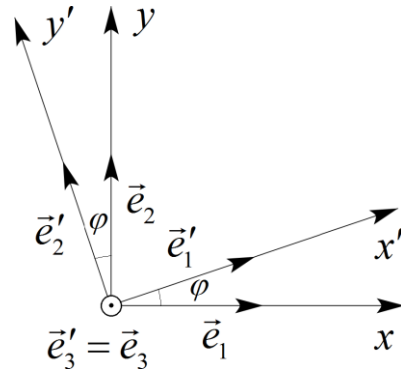
орт нормали к поверхности.

4. Постройте матрицу поворота системы координат вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$ . По определению

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos(e'_1, e_1) & \cos(e'_1, e_2) & \cos(e'_1, e_3) \\ \cos(e'_2, e_1) & \cos(e'_2, e_2) & \cos(e'_2, e_3) \\ \cos(e'_3, e_1) & \cos(e'_3, e_2) & \cos(e'_3, e_3) \end{pmatrix}.$$

При повороте вокруг оси  $z$  на угол  $\varphi$  (рис.) будет

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



5. Линия без потерь нагружена на емкостное сопротивление, численно равное волновому.

$f = 100 \text{ МГц}$ ,  $V = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . В конце линии  $U_2 = 200 \text{ В}$ . Найти  $\dot{U}$  на расстоянии 1 м от конца линии.

6. Проверить – лежат ли векторы  $\vec{a}(1; 2; 3)$ ,  $\vec{b}(4; 5; 6)$  и  $\vec{c}(7; 8; 9)$  в одной плоскости, т.е. являются ли они компланарными.

7. Для векторов  $\vec{a}(1;1;3)$ ,  $\vec{b}(-2;1;2)$ ,  $\vec{c}(2;0;5)$  вычислить смешанное произведение  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .

8. Для векторов  $\vec{a}(1;1;3)$ ,  $\vec{b}(-2;1;2)$ ,  $\vec{c}(2;0;5)$  вычислить векторные произведения:

1)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; 2)  $\vec{a} \times \vec{c}$ ; 3)  $\vec{c} \times \vec{b}$ ; 4)  $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c})$ ; 5)  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

9. Пусть даны два вектора  $\vec{a}(1; -2; 3)$ ,  $\vec{b}(2; -1; -1)$  требуется вычислить

1)  $\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$ , 2)  $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \vec{b}$ .

10. Вычислить объём пирамиды, если известны координаты её вершин:

$A(2;1;4)$ ,  $B(1;2;3)$ ,  $C(6;0;2)$ ,  $D(3;3;3)$ ; 2)  $A(2;1;5)$ ,  $B(5;0;3)$ ,  $C(4;0;8)$ ,  $D(6; -2; 6)$ .

### III

#### (третьи) задачи:

1. Найти действительную и мнимую части комплексного числа, его модуль, аргумент, найти сопряженное ему число: 1)  $(5 + 4i)(3 - 2i^3)$ ; 2)  $(1 - i)^{13}$ .

2. Найти и изобразить точками на комплексной плоскости все корни  $\sqrt[6]{-1 - \sqrt{3}i}$ . Изобразить пунктиром окружность, на которой эти точки лежат. Построить штрих-пунктиром правильный многоугольник с вершинами в этих точках. Нанести сетку, отобразить оси линиями черного цвета, подписать их. Масштаб по осям сделать одинаковым.

3. Три компланарных вектора линейно зависимы. Действительно ли векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны, если  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ , т.е.  $\vec{c} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} = \vec{0}$ ?

4. Множество действительных квадратных матриц  $2 \times 2$  четырёхмерно, а базисом могут служить четыре элемента этого множества:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Определить скалярное произведение таких векторов – матриц  $2 \times 2$ .

5. Даны векторы  $\vec{a} = 2i + 2j - k$  и  $b = 2i - j + 3k$ . Найти длины проекций этих векторов друг на друга.

6. Показать, что  $((r - a) \cdot (r + a)) = 0$  – уравнение сферы. Здесь  $r$  – радиус-вектор, а  $a$  – постоянный вектор.

7. Доказать тождество Лагранжа:  $([\vec{a} \times \vec{n}] \cdot [\vec{c} \times \vec{m}]) = \begin{vmatrix} (a \cdot c) & (a \cdot m) \\ (\vec{n} \cdot \vec{c}) & (\vec{n} \cdot \vec{m}) \end{vmatrix}$ .

8. Пусть в некоторой декартовой системе координат известны компоненты тензора

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что сумма  $\alpha \cdot A_{ij} + \beta \cdot B_{ij}$  представляет собой компоненты тензора второго ранга, если известно, что  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  – тензоры второго ранга, а  $\alpha$  и  $\beta$  – скаляры.

9. Найти потенциал точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ . В общем случае потенциал  $\phi(r)$

удовлетворяет уравнению:  $\frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = -4\pi q \delta(\vec{r})$ , где  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака..

10. Доказать тождество  $\text{div}(\phi \cdot A) = \phi \text{div} A + (A, \text{grad} \phi)$ , где  $\phi$  и  $A$  – соответственно скалярная и векторная функции координат.

#### IV

#### (четвёртые) задачи:

1. Найти дивергенцию и ротор векторного поля  $A$ .

а).  $A = [\vec{a}, \vec{r}]$ ; б).  $A = \vec{c} \sin(k, \vec{r})$ ; в).  $A = \vec{r}(\vec{a}, \vec{r})^n$ ;

2. Вычислить: а).  $\text{grad}(1/r)$ ; б).  $\text{div}(r/r)$ ; в).  $\text{rot}(r/r)$ .

3. Найти напряженность электрического поля  $E$ , если распределение скалярного потенциала  $\phi$  в пространстве имеет вид: а).  $\phi = -\frac{q}{x}$ ; б).  $\phi = Ae^{-\alpha x}$ ; в).  $\phi = -Az^2$ .

4. Для тензора II-го ранга в трёхмерном пространстве доказать теорему Остроградского-

Гаусса:  $\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint_S T_{ik} dS_i$ .

5. Вычислите для поля  $\vec{B} = -\nabla \left( \frac{q}{r} \right)$ .

а). поток вектора  $B$  через поверхность сферы единичного радиуса

б). интеграл по объёму сферы от  $\text{div} B$

произвести прямое доказательство теоремы Остроградского-Гаусса.

6. Для тензора II-го ранга в трёхмерном пространстве доказать теорему Остроградского-Гаусса:  $\int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} dV = \oint_S T_{ik} dS_i$ . (исходить из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора  $A_i = T_{ik} d_k$ , где  $\vec{d}$  – постоянный вектор.)
7. Доказать тождество  $(\nabla, \vec{A}) \vec{B} + (\vec{A}, \nabla) \vec{B} = \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}$ , где  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  – векторные функции координат.

8. Найти матрицу  $C=3A-2B$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ .

9. Найти изображение периодического импульса с периодом  $2\tau$

$$f(t) = \begin{cases} h - \frac{h}{\tau} t & 0 \leq t \leq \tau \\ -\frac{h}{\tau} (t - \tau) & \tau < t < 2\tau \end{cases}$$

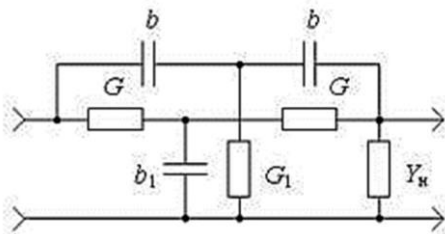
10. Найдем изображения по Лапласу тригонометрических и гиперболических синуса и косинуса.

$$e^t \sim \frac{1}{p-1}, \quad e^{-t} \sim \frac{1}{p+1}, \quad e^{it} \sim \frac{1}{p-i}, \quad e^{-it} \sim \frac{1}{p+i}$$

$$cht = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \sim \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) = \frac{p}{p^2-1}, \quad sht = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \sim \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{p^2-1}$$

#### V (пятыe) задачи:

1. Найти вычеты функции  $\frac{1}{z^2+1}$  во всех особых точках конечной плоскости. У функции два полюса первого порядка  $z=i, z=-i$ .
2. Записать в алгебраической и показательной формах выражение для полного комплексного сопротивления индуктивной катушки с параметрами  $R_K=3 \text{ Ом}$ ;  $L_K=0,0127 \text{ Гн}$ ,  $f=50 \text{ Гц}$ .
3. Найти параметры и передаточную функцию схемы двойного Т-образного моста, нагруженного на  $Y_H$ .



4. Линия без потерь длиной  $l = \lambda/10$  разомкнута на конце.  $Z_C = 200 \text{ Ом}$ , в начале линии  $U_1 = 200 \text{ В}$ . Найти  $\dot{I}$  в середине линии.
5. Рассмотреть падение волны напряжения, возникшей при коммутации в схеме предыдущей задачи, на резистор  $R_H = 100 \text{ Ом}$  и определить обратные волны тока и напряжения, образующиеся при этом падении.

6. Показать, что векторное поле  $\vec{F}$  является потенциальным и найти его потенциал

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x + yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$$

7. Определить активную, реактивную и полную мощности, если мгновенные значения тока и напряжения заданы уравнениями:

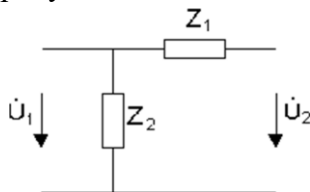
$$u = 141 \sin(314t + 60^\circ), \text{ В}; \quad i = 7,07 \sin(314t + 30^\circ), \text{ А}$$

8. Заданы графики изменения  $u(t)$  и  $i(t)$  (с амплитудами  $U_m=141\text{В}$ ;  $I_m=2,82\text{ А}$  для участка электрической цепи. Записать функции в тригонометрической и комплексной формах, если  $f = 50\text{ Гц}$ . Определить полное сопротивление и угол сдвига фаз. Построить схему замещения цепи.

9. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -25 & \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

10. Определить  $A$ -параметры четырехполюсника схема которого представлена на рисунке.



## Типовые вопросы к экзамену

1. Комплексные величины. Функции комплексной переменной. Понятие комплексного числа. Действительная и мнимая часть комплексного числа. Мнимая единица. Степень комплексного числа. Комплекс плоскость.
2. Сопряженные комплексные числа. Корень из комплексного числа и единицы. Операции с комплексными числами. Аналитическая функция. Криволинейный интеграл от функции комплексной переменной.
3. Теорема Коши. Ряд Тейлора, Лорана. Теорема о вычетах. Эквивалентный контур. Теорема о числе полюсов и нулей. Конформные отображения. Теорема Шварца-Кристоффеля.
4. Применение комплексных величин при расчете электрических цепей в синусоидальном режиме. Графическое изображение синусоидальной функции. Представление электрических величин с помощью комплексных чисел.
5. Комплексное полное сопротивление при последовательном и параллельном соединении. Метод комплексных амплитуд. Обобщение понятия комплексного полного сопротивления (импеданс).
6. Правила Кирхгофа и законы Ома в комплексной форме. Комплексный вектор. Векторная диаграмма для токов и напряжений в электрической цепи с комплексными величинами. Баланс мощностей.
7. Ряд Фурье. Интеграл Фурье. Разложение в ряд по ортогональным функциям. Метод Даламбера и метод Фурье. Разложение в ряд Фурье. Ряды с комплексными числами.
8. Графическое представление спектра частот. Распространение ряда Фурье на периодические функции. Вещественная форма интеграла Фурье.
9. Комплексная форма интеграла Фурье. Ряды с комплексными членами. Применение рядов к электрическим цепям. Преобразование Фурье, применение к электрическим цепям. Изучение диаграмм направленности
10. Скалярные и векторные величины. Ось и направление вращения вектора. Положительное направление трех векторов  $a, b, c$ . Угол между двумя векторами  $a$  и  $b$ .
11. Операции над векторами. Произведение вектора на скаляр. Сложение и вычитание

- векторов. Скалярное и векторное произведение. Смешанное произведение трех векторов.
12. Дифференциальные операции с векторами. Функции точек. Векторные интегралы. Приложения векторного исчисления к теории электромагнитного поля.
  13. Силовые линии тока. Градиент сложной скалярной функции. Дивергенция и вихрь (ротор). Оператор Лапласа и Гамильтона. Общий случай векторного поля.
  14. Электростатическое поле. Магнитное поле постоянных токов. Электромагнитное поле. Закон Фарадея. Закон Ампера.
  15. Циркуляция и поток вектора. Теорема Остроградского-Гаусса. Уравнения Максвелла. Векторный потенциал магнитного поля, возбужденного током.
  16. Системы ортогональных криволинейных координат в пространстве. Система цилиндрических и сферических координат. Система параболических и эллипсоидальных координат вращения.
  17. Приложения к уравнениям Максвелла для электромагнитных колебаний и волн. Уравнения Максвелла в ортогональных криволинейных координатах.
  18. Применение тензорного исчисления к исследованию электрических цепей. Тензорная алгебра. Тензорная плотность и тензорная емкость. Матричная форма формул преобразования координат.
  19. Методы интегрирования дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.
  20. Уравнение Бернулли и Лагранжа. Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Уравнение Эйлера.
  21. Интегрирование при помощи степенных рядов. Уравнения с частными производными. Частный интеграл неоднородного уравнения. Уравнение Лапласа и Пуассона.
  22. Законы Ома в дифференциальной и интегральной форме. Закон Джоуля-Ленца, работа, электрическая энергия и мощность. Электромагнитные колебания в прямоугольной полости.
  23. Применение специальных функций для расчетов в электротехнике и радиоэлектронике. Приложение гиперболических функций к расчету длинных линий. Представление гамма-функции через интеграл Коши.
  24. Теория вероятностей и законы распределения случайных величин. Случайная величина. Независимые события. Теорема умножения вероятностей. Несовместные события.